

## 物理問題 I

(1)

ア 作用反作用 イ  $m'$

補足

$f_1$  は右向き,  $f_2$  は左向きである。「右方向を正として表す」とあるから,  $f_1 \geq 0, f_2 \leq 0$

解説

$f_1 + f_2 = 0$  としてよい理由

緩衝装置が受ける水平方向の外力の和  $= -f_1 - f_2$

緩衝装置の重心の質量  $=$  緩衝装置の全質量  $= m'$

ここで, 緩衝装置の重心の加速度を  $a'$  とすると,

緩衝装置の重心の運動方程式は,  $m'a' = -f_1 - f_2 \dots \textcircled{1}$

また, 物体 1 の加速度を  $a_1$ , 物体 2 の加速度を  $a_2$  とすると,

それぞれの運動方程式は,

$$m_1 a_1 = f_1 \dots \textcircled{2}$$

$$m_2 a_2 = f_2 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ より, } m_1 a_1 + m_2 a_2 + m' a' = 0 \dots \textcircled{4}$$

$m_1, m_2 \gg m'$  であることと  $a_1, a_2, a'$  の大きさが同程度であることから,

$|m_1 a_1|, |m_2 a_2| \gg |m' a'|$  より,

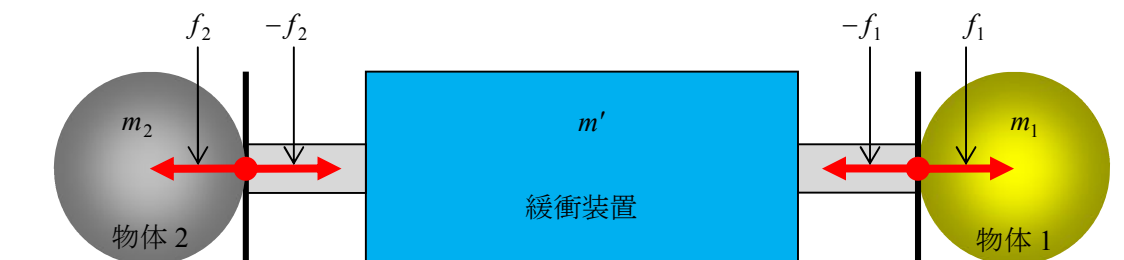
$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + m' a' = m_1 a_1 \left( 1 + \frac{m_2 a_2}{m_1 a_1} a_2 + \frac{m' a'}{m_1 a_1} \right)$$

$$\approx m_1 a_1 \left( 1 + \frac{m_2 a_2}{m_1 a_1} \right)$$

$$= m_1 a_1 + m_2 a_2 \dots \textcircled{5}$$

よって,  $\textcircled{4}, \textcircled{5}$  より,  $m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$  としてよい。

これと,  $\textcircled{2} + \textcircled{3}$  より,  $m_1 a_1 + m_2 a_2 = f_1 + f_2$  より,  $f_1 + f_2 = 0$



(2)

$$\boxed{\text{ウ}} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f \quad \boxed{\text{エ}} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

解説

$$f_1 + f_2 = 0, f_1 = f \text{ より, } f_2 = -f$$

$$\text{よって, } m_1 a_1 = f \Leftrightarrow a_1 = \frac{f}{m_1}, \quad m_2 a_2 = -f \Leftrightarrow a_2 = -\frac{f}{m_2} \quad \therefore a_1 - a_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f$$

換算質量について

$$a_1 - a_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f \text{ より, } \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (a_1 - a_2) = f$$

$a_1 - a_2$  は物体 2 から見た物体 1 の相対加速度,  $f$  は物体 1 に働く外力だから,

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (a_1 - a_2) = f \text{ は物体 2 から見た物体 1 の運動方程式である。}$$

つまり, 物体 2 から見た物体 1 の質量と加速度はそれぞれ  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  と  $a_1 - a_2$  となる。

このように, 2 物体が作用反作用の力のみを及ぼし合いながら運動している場合, 一方の物体から見た他方の物体の運動方程式,

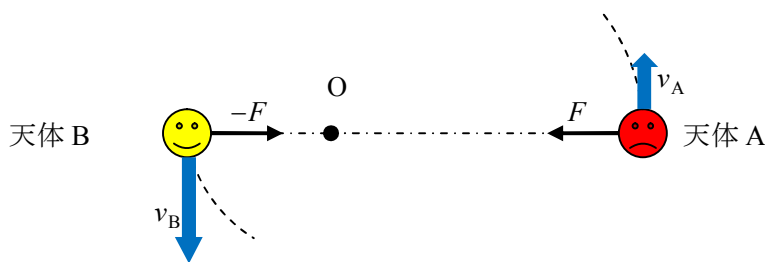
すなわち相対運動の運動方程式に現れる質量  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  を換算質量という。

補足：重力質量と慣性質量

重力質量：万有引力  $\frac{GMm}{r^2}$  の測定から求められた質量

慣性質量：ニュートンの運動の第 2 法則  $m\vec{a} = \vec{f}$  から求められた質量

例：万有引力（作用反作用の力）で互いのまわりを回る 2 つの天体の運動と換算質量



質量  $m_A$  の天体 A と質量  $m_B$  の天体 B が 2 天体の重心 O を中心に等速円運動しているとき, 両天体の向心力は万有引力であり, それは天体 A と天体 B の作用反作用の力であるから, 天体 A が天体 B から受ける万有引力を  $F$  とすると, 天体 B が天体 A から受ける万有引力は  $-F$  である。そこで, 天体 A, B の向心加速度をそれぞれ  $a_A, a_B$  とすると,

天体 A の等速円運動の中心方向の運動方程式： $m_A a_A = F \quad \therefore a_A = \frac{F}{m_A} \quad \dots \textcircled{1}$

天体 B の等速円運動の中心方向の運動方程式： $m_B a_B = -F \quad \therefore a_B = -\frac{F}{m_B} \quad \dots \textcircled{2}$

よって、天体 B から見た天体 A の加速度は、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、 $a_A - a_B = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} F$

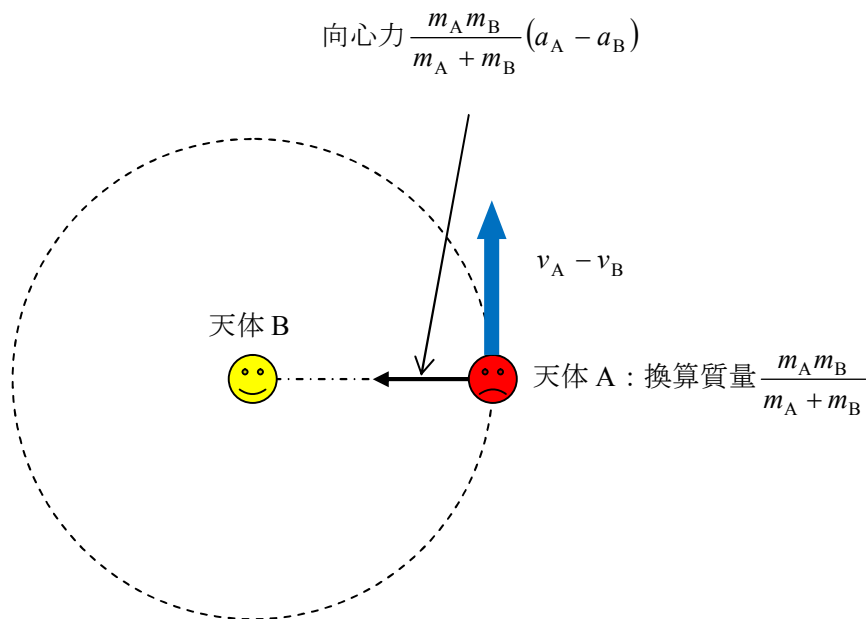
天体 A に働く外力は万有引力  $F$  だから、

天体 B から見た天体 A の運動方程式は、 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_A - a_B) = F$

ゆえに、天体 B から見ると、

質量  $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$  の天体 A が、天体 B からの万有引力  $F$  を受けて、

天体 B のまわりを向心加速度  $a_A - a_B$  で等速円運動していることになる。



(3)

④     ③     ②     ク  $\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$      ケ  $\frac{mv_0}{F}$      コ  $v_0\sqrt{Km}$      サ  $F$      シ  $Cv_0$

解説

(2)より, 物体 2 から見た物体 1 の運動方程式:  $f = ma$  ( $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $a = a_1 - a_2$ )

では,

物体 2 と緩衝装置が一体となっているとき,  
すなわち  $f > 0$  のときの  $f$  について考察する。

緩衝装置(a)の  $f$

物体 2 から見た物体 1 のつり合いの位置 (自然長の位置) からの変位を  $x$  とすると,  
 $f = -Kx$

緩衝装置(b)の  $f$

$$f = F$$

緩衝装置(c)の  $f$

$$f = Cv \quad (v \text{ は緩衝装置 (または物体 2) から見た物体 1 の速さ})$$

緩衝装置(a)の場合

グラフ

物体 2 から見た物体 1 の運動方程式は  $ma = -Kx$  だから,

物体 2 から見た物体 1 の運動は単振動である。

よって, 振幅を  $A$ , 自然長の位置を  $x = 0$  とし, ばねが伸びる向きに  $x$  軸をとると,  
 $t = 0$  のとき  $x = 0$  で, この位置から負の向きに変位するから,  $x = -A \sin \omega t$

これと  $f = -Kx$  より,  $f = KA \sin \omega t$

よって, グラフは  $f = KA \sin \omega t$  を含む。

ゆえに, ④ . . .  オ

物体 1 が力を受けている時間

また, 単振動の周期を  $T$  とすると  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  であることと

グラフ④から, 力を受けている時間は  $\frac{T}{2}$  であることから,

物体 1 が力を受けている時間

すなわち物体 1 と緩衝装置が一体となっている時間は

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \dots \quad \text{ク}$$

## 力の最大値

物体 1 が受ける力の最大値を  $f_{\max}$  とすると,  $f_{\max} = KA$

単振動運動の力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}KA^2 \quad \therefore Kmv_0^2 = K^2A^2$$

$$\text{ゆえに, } f_{\max} = KA = v_0\sqrt{Km} \quad \dots \square$$

または,

$$x = A\sin \omega t \text{ より, } v = A\omega \cos \omega t$$

$$t = 0 \text{ のとき } v = v_0 \text{ だから, } A\omega = v_0 \quad \therefore A = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\text{これと } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ より,}$$

$$f_{\max} = KA$$

$$= K \frac{v_0}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$= v_0\sqrt{Km} \quad \dots \square$$

補足

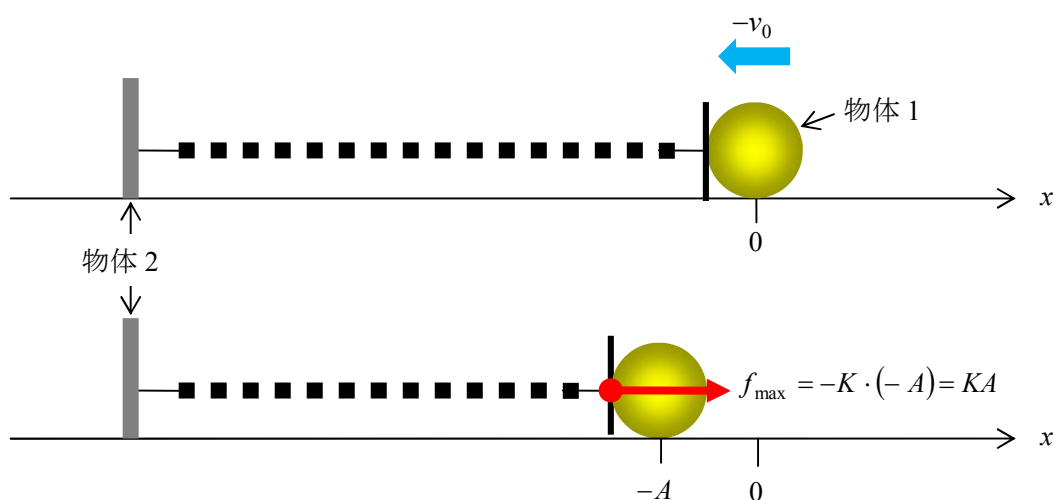
物体 2 から見た物体 1 の運動

質量  $m \left( = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)$  の物体 1 が速度  $-v_0 (= 0 - v_0)$  で自然長のばねに衝突 ( $t = 0$ ) 後,

ばねと一体となって左方向に単振動の振幅  $A$  だけ変位したとき  $\left( t = \frac{T}{4} \right)$ ,

物体 1 がばねから受ける力が最大になる。

そして、再びばねが自然長に戻ったとき  $\left( t = \frac{T}{2} \right)$ , 力が 0 になる。



物体 2 から見た物体 1 の単振動の式

衝突後、物体 1 は、ばねと一体となり、単振動をはじめめる。

このとき物体 1 はつり合いの位置 (この場合は自然長の位置) から負方向に変位する。

したがって、つり合いの位置 (この場合は自然長の位置) を  $x = 0$  とすると、

$$x = -A \sin \omega t$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \text{ より, } \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \dots \textcircled{1}$$

振幅  $A$  は、単振動の力学的エネルギー保存則  $\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} K A^2$  より、

$$A = v_0 \sqrt{\frac{m}{K}} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$x = -v_0 \sqrt{\frac{m}{K}} \sin \sqrt{\frac{K}{m}} t \quad \left( 0 \leq t \leq \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{K}{m}} \right)$$

緩衝装置(b)の場合

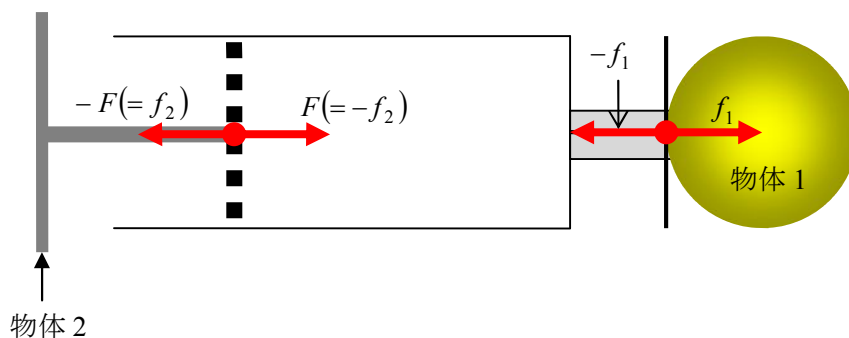
グラフ

(1)より,  $f_1 + f_2 = 0$  としてよい。

下図で物体 2 が受ける力  $f_2 = -F$  より, 物体 1 が受ける力  $f_1 = -f_2 = F$

$F$  は動摩擦力だから大きさは一定である。

よって, グラフは③ . . . **カ**



物体 1 が力を受けている時間

物体 1 は動摩擦力のみを受けながら運動するとしてよいから,

物体 1 が物体 2 に対し静止するまで受ける力積は  $F\Delta t$  である。

このときの物体 2 から見た物体 1 の運動量変化は  $0 - m(-v_0) = mv_0$

よって,  $F\Delta t = mv_0$

ゆえに, 物体 1 が力を受けている時間  $\Delta t = \frac{mv_0}{F}$  . . . **ケ**

あるいは,

物体 2 から見た物体 1 の運動方程式  $ma = F$  より,  $a = \frac{F}{m}$

よって, 物体 2 から見た物体 1 の速度  $v = -v_0 + \frac{F}{m}t$

$F = 0$  になるのは,

物体 1 が物体 2 に対し静止したとき, すなわち  $v = 0$  になったときだから,

このときの時間を  $t'$  とすると,

$$0 = -v_0 + \frac{F}{m}t' \quad \therefore t' = \frac{mv_0}{F} \quad \dots \text{ **ケ** }$$

力の最大値

力は一定だから, 力の最大値は  $F$  . . . **サ**

緩衝装置(c)の場合

グラフ

(1)より,  $f_1 + f_2 = 0$  としてよい。

$f_2 = Cv$  より,  $f_1 = -f_2 = -Cv$

これでは力が負になるので適当なグラフがない。

そこで力の正の向きを逆にとり,  $f_1 = Cv$  とする。

これと,

「必要ならば物体が速度に比例し速度と逆向きの力を受ける場合, 速度の絶対値は時間とともに指数関数的に減少することをいよ。」

から,

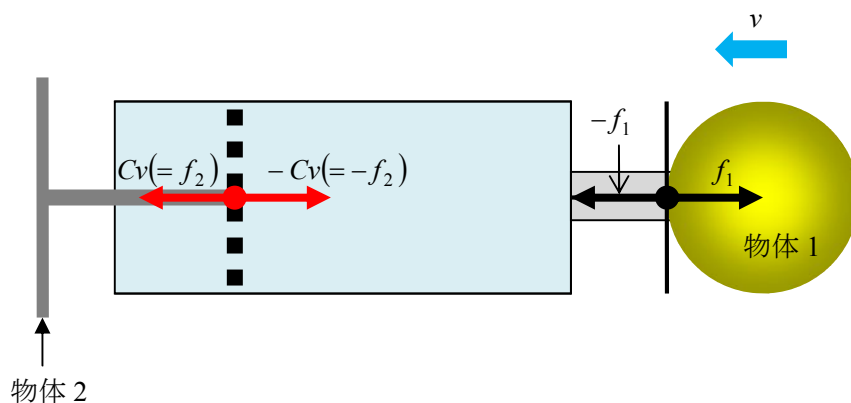
グラフは② . . . キ

力の最大値

緩衝装置から見た物体 1 の速さが最大になるときであり,

このとき物体 1 と緩衝装置は一体となっているから,

$-C \cdot (0 - v_0) = Cv_0$  . . . シ





## 補足：速さに比例する抵抗力について

指数関数の式を運動方程式の微分方程式を解いて求めてみる。

$$ma = -Cv, \quad a = \frac{dv}{dt} \text{ より, } m \frac{dv}{dt} = -Cv \quad \therefore \frac{dv}{v} = -\frac{C}{m} dt$$

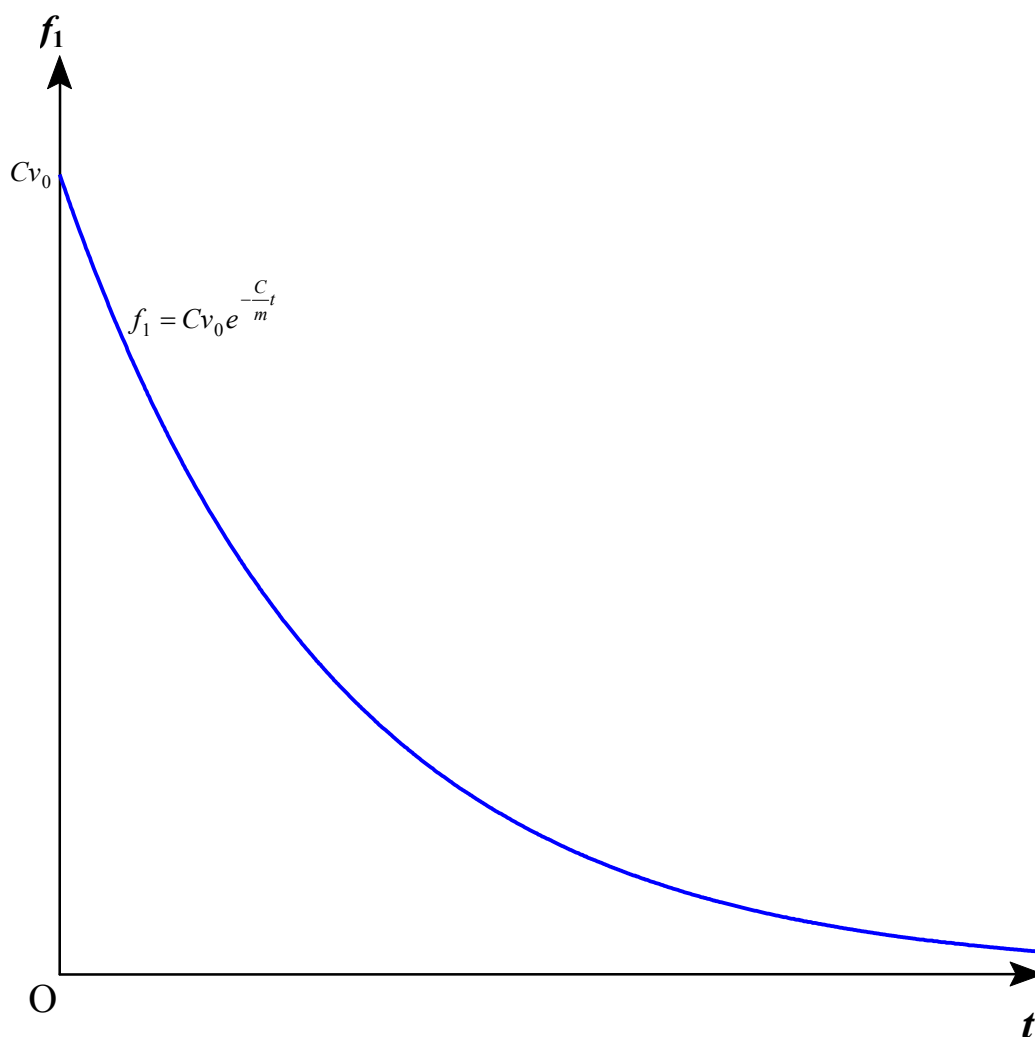
$$\text{両辺を不定積分すると, } \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{C}{m} dt$$

ここで、積分定数を  $k$  とし、自然対数をとると、

$$\log v = -\frac{C}{m}t + k \text{ より, } v = e^{-\frac{C}{m}t + k} = e^k e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$\text{これと } t=0 \text{ のとき } v = -v_0 \text{ より, } -v_0 = e^k \quad \therefore v = -v_0 e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$\text{ゆえに, } f_1 = -Cv = Cv_0 e^{-\frac{C}{m}t}$$



## 問 1

## 解法 1

(1)より、物体 1 が受ける力  $f_1$  と物体 2 が受ける力  $f_2$  の和  $f_1 + f_2 = 0$  としてよい。

また、

物体 1 の運動量変化と物体 1 が受ける力積の関係  $m_1 \Delta v_1 = f_1 \Delta t$

物体 2 の運動量変化と物体 2 が受ける力積の関係  $m_2 \Delta v_2 = f_2 \Delta t$

より、 $m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = (f_1 + f_2) \Delta t$

よって、 $m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0$

ゆえに、物体 1 と物体 2 から成る系の運動量が保存される。

また、滑らかな面の上での運動だから、

力学的エネルギー（運動エネルギーと弾性力の位置エネルギーの和）も保存される。

したがって、

衝突後十分時間がたち、物体 1 と物体 2 が緩衝装置から離れて運動しているときのそれぞれの速度を  $v_1$ 、 $v_2$  とすると、

運動量保存則より、

$$m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

衝突前と衝突後十分時間がたったとき、両物体は緩衝装置から離れているから、

緩衝装置のばねの長さは自然長ゆえ、その弾性エネルギーは 0 である。

よって、衝突前と衝突後十分時間がたったときの力学的エネルギー保存則の式は、

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

ゆえに、物体 1 の速度  $v_1$  はばね定数  $K$  に依存しない。

## 解法 2

$m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \dots \textcircled{1}$ までは解法 1 と同じ。

力学的エネルギーが保存されるはね返り衝突だから、

反発係数 1 の衝突、すなわち弾性衝突とみなしてよい。

よって、 $\textcircled{2}$ の代わりに  $\frac{\text{衝突後の相対速度}}{\text{衝突前の相対速度}} = -1$  を使うと、

$$\frac{v_1 - v_2}{0 - v_0} = -1 \text{より}, v_1 - v_2 = v_0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より}, v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

ゆえに、物体 1 の速度  $v_1$  はばね定数  $K$  に依存しない。

問 2

解法 1 : 換算質量を使って解く

被追突車から見た追突車の運動で考える。

追突車と被追突車の質量を  $m$  , 緩衝装置が追突車から受ける力を  $f$  ,

被追突車から見た追突車の速さを  $v_0$  , 被追突車から見た緩衝装置の変位の大きさを  $\Delta x$  ,

被追突車から見た追突車の加速度を  $a$  とおくと,

被追突車から見た追突車の質量 (換算質量) が  $\frac{m \cdot m}{m + m} = \frac{m}{2}$  だから,

$$\text{追突車の運動方程式は } \frac{m}{2} a = -f \quad \therefore a = -\frac{2f}{m} \quad \dots \textcircled{1}$$

緩衝装置が追突車にする仕事は負だから, 追突車の運動エネルギーと緩衝装置が追突車

$$\text{にする仕事の関係式は } \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} v_0^2 - f \Delta x = 0 \quad \therefore f = \frac{m v_0^2}{4 \Delta x} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より, } a = -\frac{v_0^2}{2 \Delta x} \quad \dots \textcircled{3}$$

一方, 地表の静止観測者が見た追突車と被追突車の加速度をそれぞれ  $a_1$  ,  $a_2$  とすると,

それぞれの運動方程式は  $ma_1 = -f$  ,  $ma_2 = f$  だから,  $m(a_1 + a_2) = 0$  より,  $a_1 = -a_2$

$$\text{よって, } a = a_1 - a_2 = -2a_2 \quad \dots \textcircled{4}$$

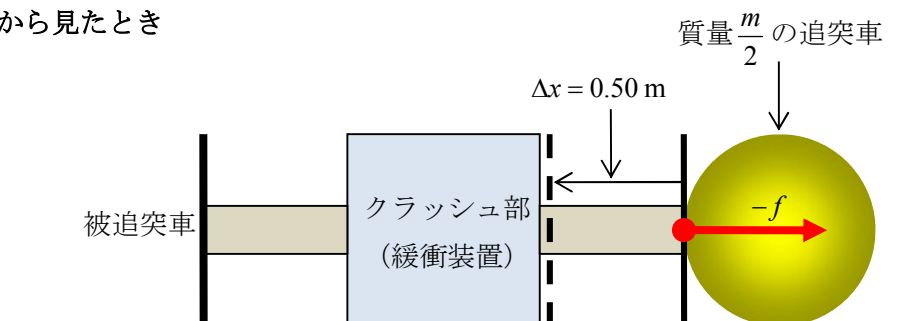
$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より, } -2a_2 = -\frac{v_0^2}{2 \Delta x} \quad \therefore a_2 = \frac{v_0^2}{4 \Delta x} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$v_0 = \frac{18 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} - 0 = 5 \text{ m/s}, \quad \Delta x = 0.25 + 0.25 = 0.50 \text{ m} \text{ だから, これを} \textcircled{5} \text{に代入すると,}$$

$$\text{被追突車が受ける加速度 } a_2 = \frac{5.0^2}{4 \cdot 0.50} = 12.5 \text{ m/s}^2$$

ゆえに, 静止していた自動車の乗客が衝突によって感じる水平方向の加速度は  $13 \text{ m/s}^2$

追突車から見たとき



解法 2 : 換算質量を使わないで解く

地表の静止観測者が見た追突車の加速度を  $a_1$ 、被追突車の加速度を  $a_2$ 、被追突車が受ける力を  $f$  とすると、それぞれの運動方程式は  $ma_1 = -f$ 、 $ma_2 = f$  だから、

$$m(a_1 + a_2) = 0 \text{ より、 } a_1 = -a_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、被追突車から見た追突車の相対加速度を  $a$  とすると、 $a = a_1 - a_2 \quad \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、 } a_1 = \frac{a}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

一方、被追突車から見た追突車は

$$\text{初めの速さが } v_0 = \frac{18 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} - 0 = 5 \text{ m/s, 緩衝装置がつぶれたときの速さが } 0,$$

被追突車の向きの追突車の変位は  $0.50 \text{ m}$  だから、

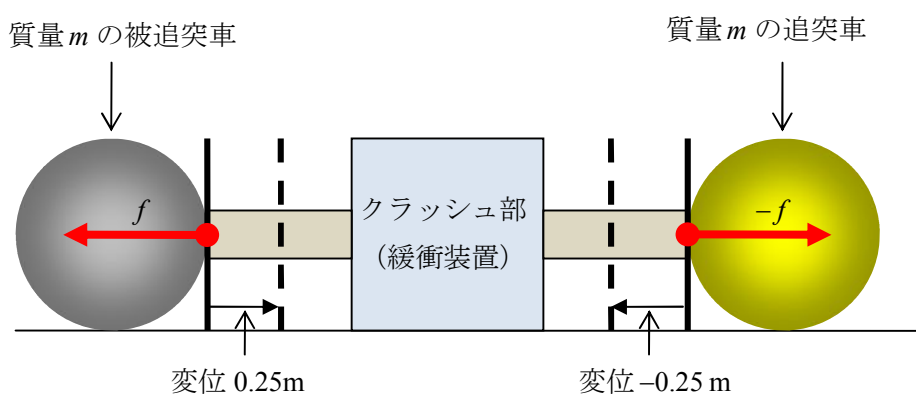
$$0 - 5.0^2 = 2 \times a \times 0.5 \quad \therefore a = -25 \text{ m/s}^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{よって、 } \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より、 } a_1 = \frac{a}{2} = -12.5 \approx -13 \text{ m/s}^2$$

これと  $\textcircled{2}$  より、 $a_2 = 13 \text{ m/s}^2$

ゆえに、静止していた自動車の乗客が衝突によって感じる水平方向の加速度は  $13 \text{ m/s}^2$

地上で静止している観測者が見たとき



補足：相対加速度  $a$  から絶対加速度を求める方法の一般化

追突車の質量を  $m_2$ ，被追突車の質量を  $m_1$  とすると，

$$\text{換算質量は， } \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

よって，追突車から見た被追突車の運動方程式は，

$$f = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a \quad (a \text{ は追突車から見た被追突車の加速度}) \quad \dots \textcircled{1}$$

地上から見た被追突車の加速度を  $a_1$  とすると，

被追突車の運動方程式は，被追突車の質量  $m_1$  より，

$$f = m_1 a_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より， } m_1 a_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a$$

よって，

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad \dots \textcircled{3}$$

地上から見た追突車の加速度を  $a_2$  とすると， $a = a_1 - a_2$  だから，

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (a_1 - a_2)$$

よって，

$$a_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} a \quad \dots \textcircled{4}$$

補足

地上から見た運動方程式  $-f = m_2 a_2$  と  $\textcircled{1}$  を連立させて求めてもよい。

地上から見た運動方程式

$$f = m_1 a_1, \quad -f = m_2 a_2 \text{ より，}$$

$$a = a_1 - a_2 = f \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} f \quad \therefore f = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a$$

この式と  $f = m_1 a_1$ ， $-f = m_2 a_2$  をそれぞれ連立させると，

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad a_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} a$$

が得られる。

## 物理問題 II

(1)

アルミ板に発生する渦電流をコイルに発生する誘導電流に置き換えたモデル

$$\boxed{\text{イ}} \quad Ba(2b - Vt)$$

解説

立式のコツ

どんな関数になるかを推測し、必要な情報を使って立式する。

必要であれば、式に矛盾がないかを確認する。

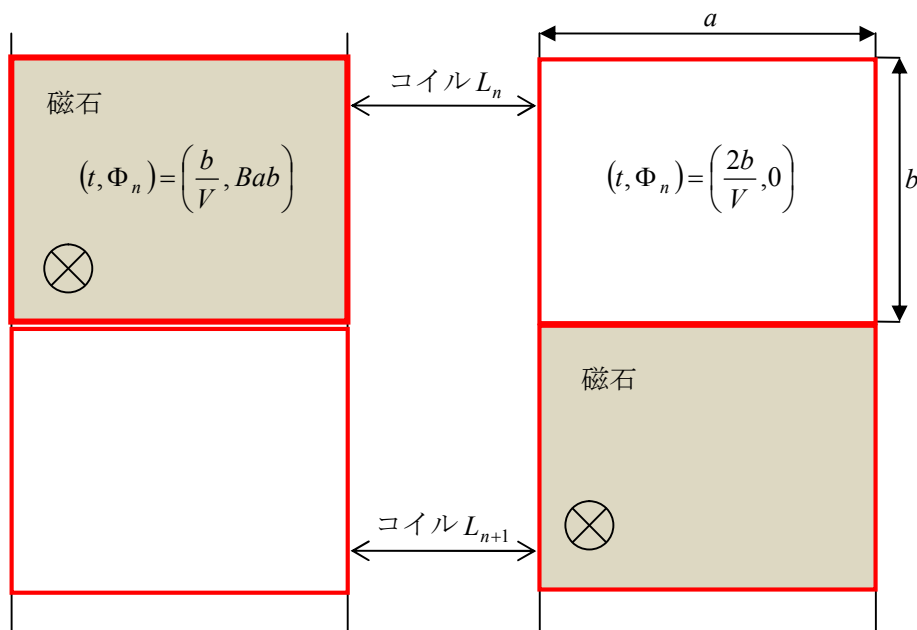
コイル  $L_n$  を貫く磁束を  $\Phi$  とすると、 $\Phi$  は時刻  $t$  の 1 次関数であり、

$$t = \frac{b}{V} \text{ のとき } \Phi = Bab, \text{ すなわち } (t, \Phi) = \left( \frac{b}{V}, Bab \right)$$

$$t = \frac{2b}{V} \text{ のとき } \Phi = 0, \text{ すなわち } (t, \Phi) = \left( \frac{2b}{V}, 0 \right)$$

よって、これら 2 点を通る直線の方程式は、
$$\Phi(t) = \frac{0 - Bab}{\frac{2b}{V} - \frac{b}{V}} \left( t - \frac{2b}{V} \right) = Ba(2b - Vt)$$

下図は斜面に対し垂直真上から見た図である。



$$\boxed{\square} \quad -\frac{BaV}{R} \quad \boxed{\triangleleft} \quad \frac{BaV}{R}$$

解説

誘導起電力の大きさを  $v$  とすると、ファラデーの電磁誘導の法則より、 $v = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$

$$0 < t < \frac{b}{V} \text{ のとき, } v = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| \frac{d(BaVt)}{dt} \right| = BaV$$

$$\frac{b}{V} < t < \frac{2b}{V} \text{ のとき, } v = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| \frac{d\{Ba(2b - Vt)\}}{dt} \right| = BaV$$

誘導電流の大きさは、電気抵抗が  $R$  だから、いずれの場合も  $|I| = \frac{BaV}{R}$

電流の向きの正負については、レンツの法則から考えると、

$$0 < t < \frac{b}{V} \text{ のとき}$$

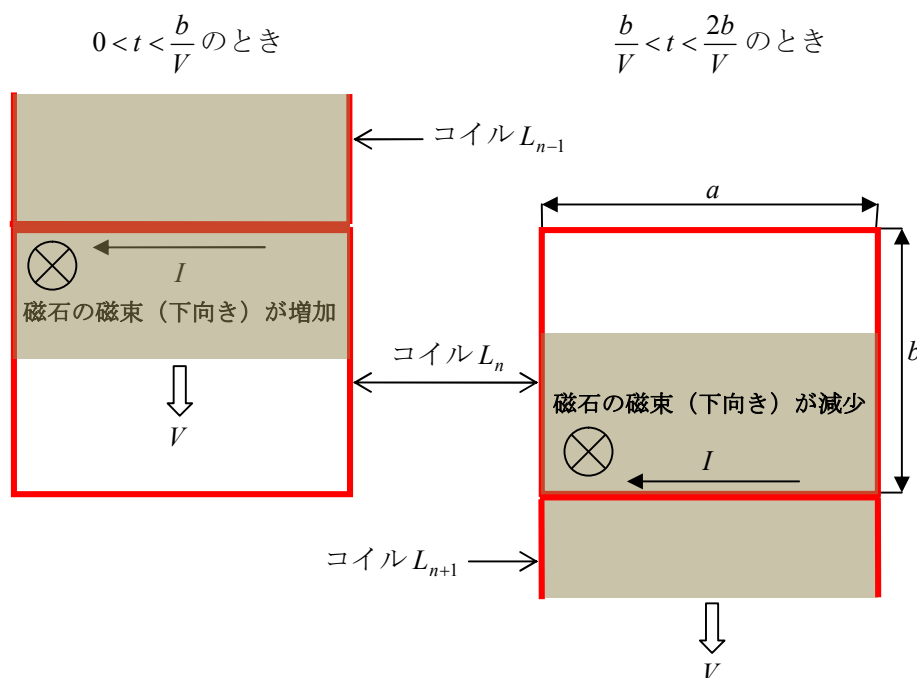
コイル  $L_n$  を下向きに貫く磁束が増加するから、誘導電流は反時計回り、すなわち負。

$$\text{よって, } I = -\frac{BaV}{R} \quad \dots \boxed{\square}$$

$$\frac{b}{V} < t < \frac{2b}{V} \text{ のとき}$$

コイル  $L_n$  を下に貫く磁束が減少するから、誘導電流は時計回り、すなわち正。

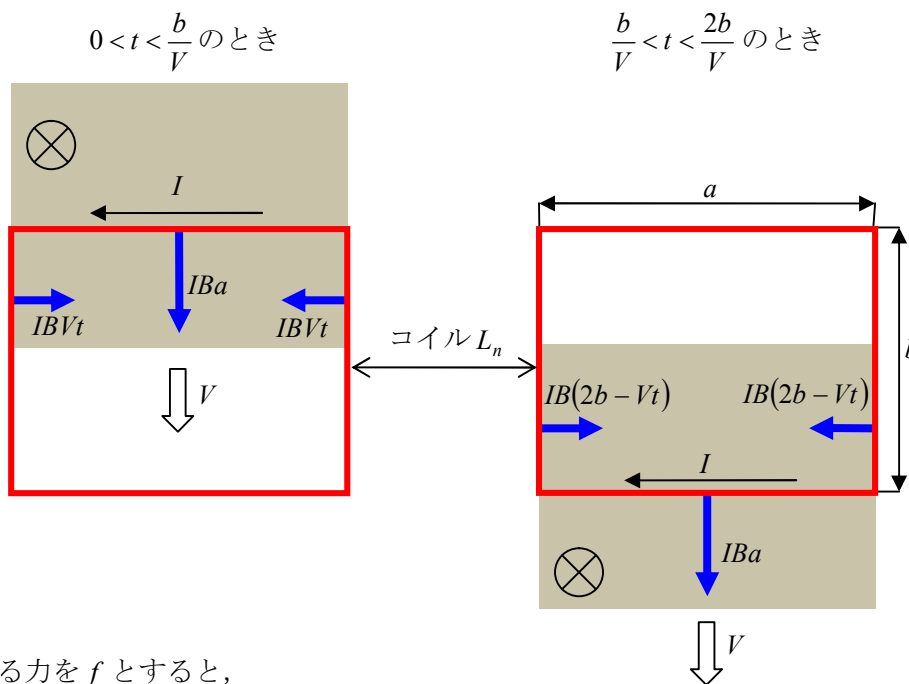
$$\text{よって, } I = \frac{BaV}{R} \quad \dots \boxed{\triangleleft}$$



☐  $\frac{B^2 a^2 V}{R}$     ☐  $\frac{B^2 a^2 V}{R}$

解説

下図は斜面に対し垂直真上から見た図である。



求める力を  $f$  とすると,

$0 < t < \frac{b}{V}$  のとき

左右の縦の辺の部分の電磁力は相殺し合い 0 になるから、  
 コイルが受ける正味の電磁力は、コイル上辺部であり、  
 斜面下向きを正の向きとするから、

$$f = IBa = \frac{BaV}{R} \cdot Ba = \frac{B^2 a^2 V}{R} \quad \dots \quad \text{☐}$$

$\frac{b}{V} < t < \frac{2b}{V}$  のとき

同様にして、 $f = IBa = \frac{BaV}{R} \cdot Ba = \frac{B^2 a^2 V}{R} \quad \dots \quad \text{☐}$



$$\boxed{\sphericalangle} \frac{2B^2 a^2}{R} \quad \boxed{\beth} \frac{mgR \sin \theta}{2B^2 a^2}$$

解説

磁石は隣り合う 2 つのコイルから磁石がコイルにおよぼす力の反作用、すなわち電磁力の反作用を受ける。

つまり、

$$0 < t < \frac{b}{V} \text{ のとき}$$

磁石はコイル  $L_{n-1}$  の下辺部およびコイル  $L_n$  の上辺部が受ける電磁力の反作用を受ける。

$$\frac{b}{V} < t < \frac{2b}{V} \text{ のとき}$$

磁石はコイル  $L_n$  の下辺部およびコイル  $L_{n+1}$  の上辺部が受ける電磁力の反作用を受ける。

⋮

という具合に、磁石は常に 2 つのコイルが受ける電磁力の反作用を受ける。

これと、1 つのコイルが受ける電磁力  $f = \frac{B^2 a^2 V}{R}$  より、

$$\text{磁石が 2 つのコイルから受ける力 } F = -2f = -\frac{2B^2 a^2 V}{R}$$

よって、 $F = -CV$  より、 $C = \frac{2B^2 a^2}{R}$  . . .  $\boxed{\sphericalangle}$

また、磁石は斜面に沿って等速度運動をするから、

$$\text{磁石に働く力の重力の斜面成分のつり合いより、} \frac{2B^2 a^2 V}{R} = mg \sin \theta$$

$$\therefore V = \frac{mgR \sin \theta}{2B^2 a^2} \quad \dots \boxed{\beth}$$

## 補足

## 誘導起電力の公式と観測者

誘導起電力大きさの公式には、磁界中を動く導体棒からの  $V = |vBl|$  と

ファラデーの電磁誘導の法則からの  $V = N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$  の 2 つがあり、

$V = |vBl|$  は、磁界とともに移動している観測者の立場から、

$V = N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$  は、導体棒とともに移動している観測者の立場からが導かれる。

## 磁界と共に移動する観測者の解釈

観測者が見ると、導体棒は、磁界の磁束を切りながら、動いている。

導体棒が動いているならば、導体棒中の荷電粒子も導体棒とともに動いている。

運動中の荷電粒子はローレンツ力を受けるから、荷電粒子は導体棒の一端へ移動する。

すると、荷電粒子の移動を妨げる向き電界が生じ、それがどんどん強くなっていき、やがて、ローレンツ力と静電気力が釣り合う。

このときの電界の強さを  $E$  とすると、 $qE = qvB$  より、 $E = vB$

よって、誘導起電力の大きさ  $V = |vBl|$  を得る。

## 導体棒とともに移動している観測者の解釈

観測者が見ると、磁界の磁束が導体棒によって切られながら、動いている。

導体棒は静止しているから、荷電粒子も静止している。

したがって、誘導起電力の発生を「導体棒中の荷電粒子がローレンツ力を受けてその一端へ移動したのが原因」と説明することができない。

しかし、起電力が発生するという事実を逆手にとって、「磁界が動くとき電界が生じる。

この電界が導体棒中の荷電粒子をその一端へ移動させ、導体棒に起電力を発生させる」

と説明し、単位時間に導体棒に切られる磁束と誘導起電力の大きさの測定実験から、

誘導起電力の大きさ  $V = N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$  を得る。

## まとめ

導体棒（荷電粒子）が磁界に対し運動するとすれば、誘導起電力の大きさ  $V = |vBl|$

磁界（磁束）が導体棒に対し運動するとすれば、誘導起電力の大きさ  $V = N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$

したがって、□、△ の誘導起電力の大きさ  $v$  の解説においても、

磁石とともに移動している観測者が見ると、電線が磁束を切りながら移動しているから、

$v = |vBa|$  となる。

(2)

$$\text{チ} \quad mg \sin \theta - Cv(t) \text{ または } C\{V - v(t)\}$$

解説

磁石に働く外力の斜面成分の和 =  $mg \sin \theta - Cv(t)$  より,

$$\text{磁石に関する運動方程式は } m \frac{\Delta v}{\Delta t} = mg \sin \theta - Cv(t)$$

あるいは,  $mg \sin \theta = CV$  より,  $mg \sin \theta - Cv(t) = CV - Cv(t) = C\{V - v(t)\}$

$$\text{よって, } m \frac{\Delta v}{\Delta t} = C\{V - v(t)\}$$

$$\text{リ} \quad -\frac{C}{m}$$

解説

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\Delta\{V - v\}}{\Delta t}$$

$$V \text{ は定数だから, } \frac{\Delta\{V - v\}}{\Delta t} = \frac{\{V - (v + \Delta v)\} - (V - v)}{\Delta t} = -\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\text{よって, } \frac{\Delta w}{\Delta t} = -\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \dots \text{①}$$

別解

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d(V - v)}{dt}, \quad V \text{ は定数で, } v \text{ は } t \text{ の関数だから, } \frac{dw}{dt} = -\frac{dv}{dt} \quad \dots \text{①}$$

$$m \frac{dv}{dt} = C\{V - v\} \text{ より, } m \frac{dv}{dt} = Cw \quad \therefore \frac{dv}{dt} = \frac{C}{m} w \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②より, } \frac{dw}{dt} = -\frac{C}{m} w$$

ここでは  $\Delta$  は微小変化として定義されているから,

$$d \text{ を } \Delta \text{ にすることにより, } \frac{\Delta w}{\Delta t} = -\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\boxed{\times} V \left( 1 - e^{-\frac{C}{m}t} \right)$$

解説

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\beta N \text{ は, } N(t) = N(0) \cdot e^{-\beta t} \text{ と表せる。}$$

$$\text{これを } \frac{\Delta w}{\Delta t} = -\frac{C}{m} w \text{ に適用すると,}$$

$$N \text{ と } w, \beta \text{ と } \frac{C}{m} \text{ がそれぞれ対応するから, } w(t) = w(0) \cdot e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$\text{これと } w(t) = V - v(t), w(0) = V - v(0) = V \text{ より, } V - v(t) = V e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$\text{よって, } v(t) = V \left( 1 - e^{-\frac{C}{m}t} \right)$$

補足

微分方程式を立てて、それを解くと、

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\frac{C}{m} w(t) \text{ より, } \frac{dw(t)}{w(t)} = -\frac{C}{m} dt$$

$$\text{両辺を不定積分すると, } \int \frac{dw(t)}{w(t)} = -\int \frac{C}{m} dt$$

$$\therefore \log w(t) = -\frac{C}{m}t + \alpha \quad (\alpha \text{ は積分定数}) \quad \therefore w(t) = e^{\alpha} \cdot e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$w(t) = V - v(t), w(0) = e^{\alpha}, w(0) = V - v(0) = V \text{ より, } V - v(t) = V e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$\text{ゆえに, } v(t) = V \left( 1 - e^{-\frac{C}{m}t} \right)$$

$$\boxed{\surd} \frac{m}{C}$$

解説

$$v(t_0) = V(1 - e^{-1}) \text{ および } v(t_0) = V \left( 1 - e^{-\frac{C}{m}t_0} \right) \text{ より, } \frac{C}{m}t_0 = 1 \quad \therefore t_0 = \frac{m}{C}$$

## 問 1

(a) 0.31 m/s

解説

$$V = \frac{mgR \sin \theta}{2B^2 a^2} = \frac{2.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1.0 \times 10^{-3} \Omega \times 0.80}{2 \times (0.50 \text{ T})^2 \times (1.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 0.313 \approx 0.31 \text{ m/s}$$

(b)  $4.0 \times 10^{-2}$  s

解説

$$t_0 = \frac{m}{C}, \quad C = \frac{2B^2 a^2}{R} \text{ より, } t_0 = \frac{mR}{2B^2 a^2} = \frac{2.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 1.0 \times 10^{-3} \Omega}{2 \times (0.50 \text{ T})^2 \times (1.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 4.0 \times 10^{-2} \text{ s}$$

## 物理問題 III

(1)

$$\boxed{\text{あ}} \Delta Q + AT\Delta L \quad \boxed{\text{い}} C\Delta T \quad \boxed{\text{う}} \frac{AT}{C}\Delta L \quad \boxed{\text{え}} \textcircled{3}$$

解説

内部エネルギーの変化（増加）量＝系に与えた熱＋系にした仕事より、

$$\Delta U = \Delta Q + AT\Delta L \quad \dots \boxed{\text{あ}}$$

と表せる。

一方、 $U = CT$  より、

$$\Delta U = C(T + \Delta T) - CT = C\Delta T \quad \dots \boxed{\text{い}}$$

とも表わせる。

$$\boxed{\text{あ}} \text{ と } \boxed{\text{い}} \text{ より、 } C\Delta T = \Delta Q + AT\Delta L \quad \therefore \Delta T = \frac{\Delta Q + AT\Delta L}{C}$$

$$\text{とくに断熱変化の場合、 } \Delta Q = 0 \text{ だから、温度変化 } \Delta T = \frac{AT\Delta L}{C} \quad \dots \boxed{\text{う}}$$

$$\text{したがって、 } \Delta L > 0 \text{ のとき、 } \Delta T = \frac{AT\Delta L}{C} > 0 \text{ より、温度は上昇する (}\textcircled{3}\text{) } \dots \boxed{\text{え}}$$

## 補足 1

熱力学第一法則とはエネルギー保存則のことだから、

仕事とエネルギーの関係から立式すればよい。

たとえば、

**外部から系に熱だけを与えたときのエネルギー収支の基本式**

外部が系に与えた熱＝系内部の力学的エネルギー変化＋系が外部にした仕事

**外部が系に仕事だけをしたときのエネルギー収支の基本式**

外部が系にした仕事＝系内部の力学的エネルギー変化＋系が放出した熱

**外部が系に熱を与え、仕事もしたときのエネルギー収支の基本式**

系に与えた熱＋系にした仕事＝系内部の力学的エネルギー変化

系内部の力学的エネルギー＝気体の熱運動エネルギー( $nC_v\Delta T$ )＋他の力学的エネルギー

## 補足 2

$\boxed{\text{え}}$  を定性的に考えると、

ゴムを伸ばすことで、ゴムを構成する物質の熱運動が激しくなり、温度が上昇する。

これは、針金をねじったり曲げたりしていると針金が熱くなっていくのと同じである。

## (2)

## 問 1

## 理由 1

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta \log T}{\Delta T} \text{ より, } \Delta T = T \Delta \log T$$

$$\text{これと [う] の } \Delta T \text{ と } \Delta L \text{ の関係式 } \Delta T = \frac{AT\Delta L}{C} \text{ より, } \frac{AT\Delta L}{C} = T \Delta \log T \quad \therefore \Delta L = \frac{C}{A} \Delta \log T$$

ここで  $T = T_a$  のとき  $L = L_a$ ,  $T = T_b$  のとき  $L = L_b$  ( $L_{\min} \leq L_a, L_b \leq L_{\max}$ ) とすると,

$$L_a - L_b = \frac{C}{A} (\log T_a - \log T_b) \text{ より, } L_a - \frac{C}{A} \log T_a = L_b - \frac{C}{A} \log T_b \text{ が成り立つ。}$$

これは  $L - \frac{C}{A} \log T$  が一定であることを示している。

## 補足 1

$$\frac{AT\Delta L}{C} = T \Delta \log T \text{ より, } \frac{\Delta L}{\Delta \log T} = \frac{C}{A} \text{ であり,}$$

これは横軸を  $\log T$ , 縦軸を  $L$  とすると, 傾き  $\frac{C}{A}$  の線分になることを,

つまり, 定数を  $\alpha$  とすると,  $L = \frac{C}{A} \log T + \alpha$  ( $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$ ) と表せることを示している。

## 理由 2

$$\Delta T = \frac{AT\Delta L}{C} \text{ より, } \Delta L - \frac{C}{A} \cdot \frac{1}{T} \Delta T = 0$$

$$\text{これと } \frac{1}{T} = \frac{\Delta \log T}{\Delta T} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \Delta L - \frac{C}{A} \cdot \frac{1}{T} \Delta T &= \Delta L - \frac{C}{A} \cdot \frac{\Delta \log T}{\Delta T} \Delta T \\ &= \Delta L - \frac{C}{A} \Delta \log T \\ &= \Delta \left( L - \frac{C}{A} \log T \right) = 0 \end{aligned}$$

よって,  $L - \frac{C}{A} \log T$  は一定である。

## 補足 2

$$\Delta L - \frac{C}{A} \Delta \log T = \Delta \left( L - \frac{C}{A} \log T \right) \text{ について}$$

$T = T_a$  のとき  $L = L_a$ ,  $T = T_b$  のとき  $L = L_b$  ( $L_{\min} \leq L_a, L_b \leq L_{\max}$ ) とすると,

$$\begin{aligned} \Delta L - \frac{C}{A} \Delta \log T &= (L_a - L_b) - \frac{C}{A} (\log T_a - \log T_b) \\ &= \left( L_a - \frac{C}{A} \log T_a \right) - \left( L_b - \frac{C}{A} \log T_b \right) \\ &= \Delta \left( L - \frac{C}{A} \log T \right) \end{aligned}$$

理由 3

$$\Delta T = \frac{AT}{C} \Delta L \text{ より, } \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \Delta T = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{AT}{C} \Delta L \quad \therefore dT = \frac{AT}{C} dL$$

$$\text{両辺を不定積分すると, } \frac{C}{A} \int \frac{dT}{T} = \int dL \quad \therefore \frac{C}{A} \log T = L + \alpha \quad (\alpha \text{ は積分定数})$$

$$\alpha \text{ は定数だから, } L - \frac{C}{A} \log T = \text{一定}$$

(3)

$$\boxed{\text{お}} \quad AT(L - L_0) \quad \boxed{\text{か}} \quad -AT(L - L_0)$$

解説

伸びとは長さの変化のことだから,  $\Delta L = L - L_0$

よって, 物体に外から加えられた仕事  $\Delta W = AT(L - L_0)$   $\cdots \cdots \boxed{\text{お}}$

等温変化だから,  $\Delta T = 0$  より,  $\Delta U = C\Delta T = 0$

これと  $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$  より,  $0 = \Delta Q + \Delta W$

よって,  $\Delta Q = -\Delta W = -AT(L - L_0)$   $\cdots \cdots \boxed{\text{か}}$

(4)

$$\boxed{\text{き}} \quad \textcircled{2}$$

解説

等温過程と断熱過程からなるサイクルにおいて,

断熱過程では系と外との熱のやりとりがないから,

高温熱源 (温度  $T_2$ ) から熱を吸収するのは等温過程 BC だけである。

また, このとき  $\Delta U = 0$  より,  $\Delta Q + \Delta W = 0$  すなわち  $\Delta Q + AT\Delta L = 0$  が成り立つ。

これと  $\Delta Q > 0$  より,  $AT\Delta L < 0$

よって, 変化はひもが縮む向きに, すなわち C→B の向きに起こる。

したがって, (a)であろうと(b)であろうと, サイクルは反時計回りである。

また, 断熱過程の関係式は  $\Delta Q = 0$  より,  $\Delta U = \Delta W$  すなわち  $C\Delta T = AT\Delta L$

$$\text{または, } L - \frac{C}{A} \log T = \alpha \quad (\alpha \text{ は定数}) \text{ より, } L = \frac{C}{A} \log T + \alpha$$

よって, ひもは, 温度が下がるとき短くなり, 上がるとき長くなる。

したがって, 正しいサイクルは(a)である。

以上より, (a)を反時計回りに回るサイクルが正しい。



問 2

断熱過程では断熱過程では  $L - \frac{C}{A} \log T$  が一定だから、図 1(a)において、

$$A \text{ から } B \text{ への断熱変化では, } L_B - \frac{C}{A} \log T_2 = L_A - \frac{C}{A} \log T_1 \quad \therefore L_B - L_A = \frac{C}{A} \log \frac{T_2}{T_1}$$

$$D \text{ から } C \text{ への断熱変化では, } L_C - \frac{C}{A} \log T_2 = L_D - \frac{C}{A} \log T_1 \quad \therefore L_C - L_D = \frac{C}{A} \log \frac{T_2}{T_1}$$

よって、 $L_B - L_A = L_C - L_D$  すなわち  $L_C - L_B = L_D - L_A$

(5)

$$\square 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}$$

解説

解法 1 : 熱サイクルの性質から解く

サイクルを一周すると、はじめの状態に戻るから、温度変化  $\Delta T$  は 0 である。

よって、内部エネルギー変化  $\Delta U = 0$

このとき吸収した正味の熱を  $\Delta Q'$ 、系が外にした正味の仕事を  $W'$  とすると、

$$\text{熱力学第一法則より, } \Delta Q' = \Delta U + W' = 0 + W' = W'$$

$$\text{これと } \Delta Q' = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}} \text{ より, } Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}} = W'$$

$$\text{ゆえに, 熱効率は } \frac{W'}{Q_{\text{in}}} = \frac{Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}$$

解法 2 : 図 1(a)反時計回りサイクルから解く

図 1(a)において、

等温変化の場合

$$\Delta Q + W = 0 \text{ より, } W = -\Delta Q$$

$W$  は外力がひもにした仕事だから、ひもが外にした仕事を  $W'$  とすると、 $W' = \Delta Q$

よって、

C から B への等温変化においてひもが外にした仕事は、 $\Delta Q = Q_{\text{in}}$  より、 $Q_{\text{in}}$

A から D への等温変化においてひもが外にした仕事は、 $\Delta Q = -Q_{\text{out}}$  より、 $-Q_{\text{out}}$

断熱変化の場合

$$\Delta U + W' = 0 \text{ より, ひもがした仕事 } W' = -C\Delta T$$

よって、B から A への断熱変化において、ひもが外にした仕事は  $-C(T_1 - T_2)$

D から C への断熱変化において、ひもがした仕事は  $-C(T_2 - T_1)$

以上より、1 サイクルあたりにひもが外にする仕事は

$$Q_{\text{in}} + (-Q_{\text{out}}) + \{-C(T_1 - T_2)\} + \{-C(T_2 - T_1)\} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}$$

$$\text{ゆえに, 熱効率は } \frac{Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}$$

## 問 3

等温変化で系が吸収した熱を  $\Delta Q$ ，ひもの長さの変化を  $\Delta L$  とすると，  $\Delta Q = -AT\Delta L$

図 1(a) を反時計回りに回るサイクルだから，

C から B への等温変化において，吸収した熱  $\Delta Q = Q_{\text{in}}$  より，  $Q_{\text{in}} = -AT_2(L_B - L_C)$

A から D への等温変化において，吸収した熱  $\Delta Q = -Q_{\text{out}}$  より，  $-Q_{\text{out}} = -AT_1(L_D - L_A)$

これと熱効率が  $1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}$  であることと  $L_D - L_A = L_C - L_B$  より，

$$\begin{aligned} 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} &= 1 - \frac{AT_1(L_D - L_A)}{-AT_2(L_B - L_C)} \\ &= 1 - \frac{T_1(L_D - L_A)}{T_2(L_C - L_B)} \\ &= 1 - \frac{T_1}{T_2} \end{aligned}$$